

پیوستگی

در پی تغییرات گسترده کتاب‌های درسی حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال، مبحث پیوستگی نیز دچار تغییرات گسترده‌ای شده و به شکلی نو در کتاب‌های درسی جدید بیان شده است. در ادامه با استفاده از همین مفاهیم و تعاریف جدید، اندکی در باب پیوستگی صحبت خواهیم کرد.

«تعریف: فرض کنید تابع f در نقطه a و در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) تعریف شده باشد. اگر حد این تابع در a

موجود و برابر $f(a)$ باشد، یعنی $(\text{ع}) = (\text{و})$ کفیف، گوئیم تابع f در a پیوسته است» (متن کتاب درسی حسابان).

با توجه به تعریف پیوستگی باید توجه داشت، هنگامی تابع f در $x=a$ پیوسته است که:

۱. $f(a)$ تعریف شده باشد. (یعنی a در دامنه تابع f قرار داشته باشد).

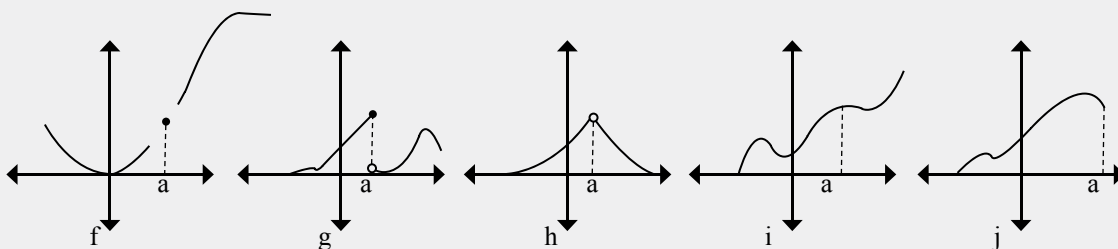
۲. تابع $f(x)$ در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) a تعریف شده باشد.

۳. (و) کفیف موجود و با $f(a)$ برابر باشد.

دقت کنید که بنابر تعریف کتاب درسی حسابان، اگر تابعی در یک نقطه تعریف نشده باشد، نمی‌توانیم در رابطه با پیوستگی یا ناپیوستگی آن در نقطه مذکور صحبت کنیم. همچنین، اگر تابع f در $x=a$ تعریف شده باشد، اما در هیچ همسایگی از این نقطه تعریف نشده باشد، نمی‌توانیم از پیوستگی این تابع در $x=a$ صحبت کنیم. به مثال زیر از کتاب حسابان دقت کنید:

«آیا تابع $\frac{x^2-1}{x-1}$ در $x=1$ پیوسته است؟ از پیوستگی این تابع در $x=1$ نمی‌توانیم صحبت کنیم. چون این تابع در $x=1$ تعریف نشده است. شرط صحبت از پیوستگی یا ناپیوستگی یک تابع در یک نقطه آن است که تابع در آن نقطه و یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) آن نقطه تعریف شده باشد» (متن کتاب درسی حسابان).

مثال: پیوستگی یا ناپیوستگی توابع زیر را در $x=a$ تعیین کنید.



شکل ۱

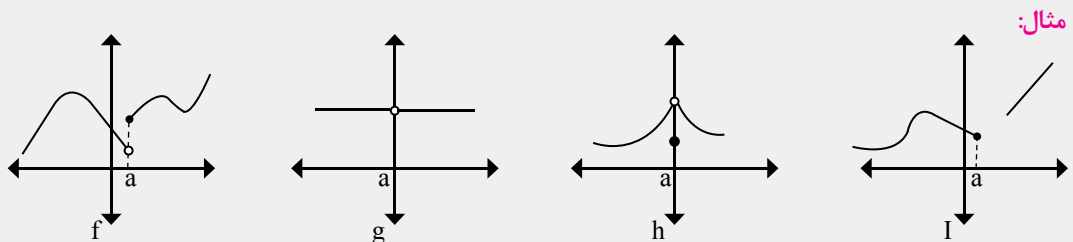
پاسخ:

- از پیوستگی تابع f در نقطه a نمی‌توان صحبت کرد. زیرا در هیچ همسایگی از a تعریف نمی‌شود.
- تابع g در نقطه a ناپیوسته است، زیرا در این نقطه تعریف می‌شود، اما (و) کفیف وجود ندارد.

- از پیوستگی تابع h در نقطه a نمی توان صحبت کرد، زیرا a در دامنه h قرار ندارد.
- تابع J و I در نقطه $x=a$ پیوسته اند، زیرا: $(\mathcal{E}) = \mathcal{D} = (\mathcal{O})$ کفیف و $(\mathcal{E}) = (\mathcal{J})$ و $(\mathcal{O})$ کفیف.

پیوستگی راست و چپ

تعریف: می گوییم f در c از راست پیوسته است، هرگاه: $(\mathcal{E}) = (\mathcal{O})$ کفیف و می گوییم f در c از چپ پیوسته است، هرگاه: $(\mathcal{E}) = (\mathcal{J})$ کفیف. (متن کتاب درسی دیفرانسیل).



شکل ۲

- تابع f در نقطه a پیوستگی راست دارد. یعنی: $(\mathcal{E}) = (\mathcal{O})$ کفیف. اما پیوستگی چپ ندارد. زیرا: $(\mathcal{E}) \neq (\mathcal{J})$ کفیف.
- نقطه a جزء دامنه g نیست و در نتیجه نمی توان در رابطه با پیوستگی تابع در این نقطه صحبت کرد.
- تابع h در نقطه a نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ.
- تابع I در نقطه a پیوستگی چپ دارد. یعنی: $(\mathcal{E}) = \mathcal{D} = (\mathcal{O})$ کفیف. اما در رابطه با پیوستگی راست آن نمی توان صحبت کرد؛ زیرا در هیچ همسایگی راست a تعریف نمی شود.

پیوستگی روی بازه

تعریف: می گوییم تابع f روی بازه I پیوسته است، هرگاه f در هر نقطه I پیوسته باشد. به ویژه می گوییم f تابعی پیوسته است، هرگاه f در هر نقطه دامنه اش پیوسته باشد (متن کتاب درسی دیفرانسیل).
دقت کنید! هنگامی می گوییم تابعی پیوسته است که در تمام نقاط دامنه اش پیوسته باشد. همچنین، بدیهی است که اگر تابع f روی بازه I پیوسته باشد، می باید: $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}$.

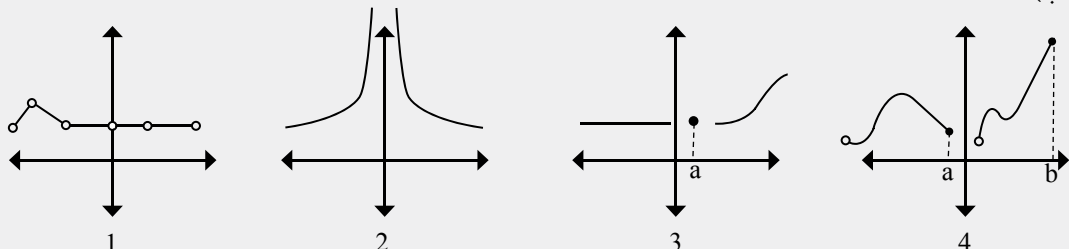
مثال: پیوستگی توابع زیر را در دامنه خود بررسی کنید.

$$\text{الف)} \quad (\mathcal{O}) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(تمرین در کلاس کتاب درسی دیفرانسیل)

پاسخ: می دانیم: $(1+\infty) = \mathcal{P}$ و $(\mathcal{E}) = (\mathcal{O})$ کفیف. پس f تابعی پیوسته است.

(ب)



شکل ۳

پاسخ:

- $$\text{ع} \xrightarrow{و} \text{غ} = \text{غ} \xrightarrow{و} \text{ك} = \text{ك} \xrightarrow{و} \text{ق}$$

مثال: تابع $f(x) = \frac{39}{(x-3)(x^2-29x+1)}$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

قضیه: اگر f و g در a پیوسته باشند، آن گاه:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \neq 0, \quad \frac{f}{g}, \quad g \neq 0$$

مثال: فرض کنیض ص = $\sqrt{0}$ و (و) غرض ص = $\sqrt{0}$ داریم: $\text{ص} = \text{ص} = \text{ص}$. همچنین هر دو تابع g و f در $x=0$

پیوسته هستند. پس:
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{R} \\ 0 & x \notin \mathbb{R} \end{cases}$$
 بدیهی است که این تابع در $x=0$ پیوسته است. تعریف شده است.

$$(g - \dot{x})(\omega) = \sqrt{\omega} + \text{ضص}\sqrt{\omega} + \text{ضص}^2\text{ضص}$$

مثال: اگر $f+g$ و $f-g$ هر دو در نقطه x پیوسته باشند، آن گاه کدام گزینیه صحیح است؟ (سراسری ۱۳۹۱)

(الف) الزاماً g و f هر دو در X پیوسته‌اند.

(ب) f, g ممکن است در X پیوسته نباشد.

(ج) f یا g ممکن است در X پیوسته نباشند.

(د) الزاماً $\text{fog}(x)$ در x پیوسته است.

پاسخ: «باید فرض کنیم: $\sqrt{g} = \sqrt{g}$ و $\sqrt{g} = \sqrt{g}$ بدیهي است که دامنه f برابر $(-\infty, +\infty)$ و دامنه g برابر R است و در

نتیجه دامنهٔ $\mathbb{R}^n$ مساوی اشتراک این دو دامنه، یعنی $(-\infty, +\infty)$ خواهد بود. حال بدیهی است که پیوستگی راست تابع f در $x=0$ به معنای پیوستگی کامل آن است:

$$\lim_{g \rightarrow 0^+} (g \pm \sqrt{g}) = \lim_{g \rightarrow 0^+} (g \pm \sqrt{g}) \cdot 1 = (0 \pm 0) \cdot 1 = 0$$

واضح است که بر اساس تعریف جدید کتاب از پیوستگی، توابع $(g \pm g)$ که ما مثال زدیم، در $X=0$ پیوسته هستند. در حالی که

ص $\phi(\omega) = 0$ در $X=0$ ناپیوسته است و گزینه ج صحیح است».

ممکن بود در حل این سؤال این گونه استدلال می کردیم:

$$\begin{aligned} &\text{در } X=x \text{ پیوسته است. } (f \circ g)(x) = f(g(x)) \\ &\text{در } X=x \text{ پیوسته است. } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \\ \Rightarrow &(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = x \\ &\text{در } X=x \text{ پیوسته است. } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = x \end{aligned}$$

و به این ترتیب نتیجه می گرفتیم g و f در $X=x$ پیوسته هستند. اما دقت کنید که تساوی های فوق فقط در شرایطی برقرار هستند که: $f \circ g = g \circ f$ در واقع داریم:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \begin{cases} f(g(x)) & \text{if } x \in \text{Domain of } g \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases} \\ (g \circ f)(x) &= \begin{cases} g(f(x)) & \text{if } x \in \text{Domain of } f \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

نکته: اگر f در a پیوسته و g در a ناپیوسته باشد، درباره پیوستگی هیچ یک از توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ در a نمی توانیم

تصمیم گیری کنیم (وضعیت پیوستگی آن ها در این نقطه مشخص نیست). به توضیحات زیر دقت کنید:

● f را تابع ثابت 0 با دامنه R و g را به شکل $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$ فرض کنید. بدیهی است که تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته و g در این نقطه ناپیوسته است. مشاهده می کنیم که هر دو تابع f و g در نقطه $x=0$ پیوسته هستند.

● در مورد $f \circ g$ در حقیقت ممکن است با محدود شدن دامنه تابع g به: $\text{Domain of } g$ این تابع در a ، و در نتیجه $f \circ g$ نیز در نقطه $x=a$ پیوسته باشند. حل مثال بعد کمک زیادی به درک این موضوع خواهد کرد.

توجه کنید که به سادگی می توان توابع g و f را طوری تعریف کرد که توابع ذکر شده (یعنی $f \circ g$ و $g \circ f$) در $x=a$ ناپیوسته باشند.

مثال: فرض کنید: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$ بدیهی است که f در 0 پیوسته و g در 0 ناپیوسته است. حال توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases} \\ (g \circ f)(x) &= \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases} \\ (f \circ g)(x) &= \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases} \\ (g \circ f)(x) &= \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

واضح است که تمامی توابع بالا در دامنه خود (و در $x=0$) پیوسته هستند. (همان طور که مشاهده کردید، در این مثال با تغییر دامنه g از R به $\text{Domain of } g$ ، وضعیت پیوستگی آن در نقطه $x=0$ تغییر کرد و موجب پیوستگی توابع $f \circ g$ شد.)

نکته: اگر توابع f و g در a ناپیوسته باشند، درباره پیوستگی هیچ یک از توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ در a نمی توانیم تصمیم گیری کنیم (وضعیت پیوستگی آن ها در این نقطه مشخص نیست).

برای مثال فرض کنید: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$ بدیهی است که f و g در $x=0$ ناپیوسته هستند. همچنین:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &\equiv 0 - (g \circ f)(x) \equiv 2 \\ (g \circ f)(x) &\equiv -1 - (f \circ g)(x) \equiv -1 \end{aligned}$$

که همگی در $x=0$ پیوسته هستند.

توجه کنید که به سادگی می توان توابع g و f را طوری تعریف کنید که توابع ذکر شده (یعنی $f \circ g$ و $g \circ f$) در $x=a$ ناپیوسته باشند.